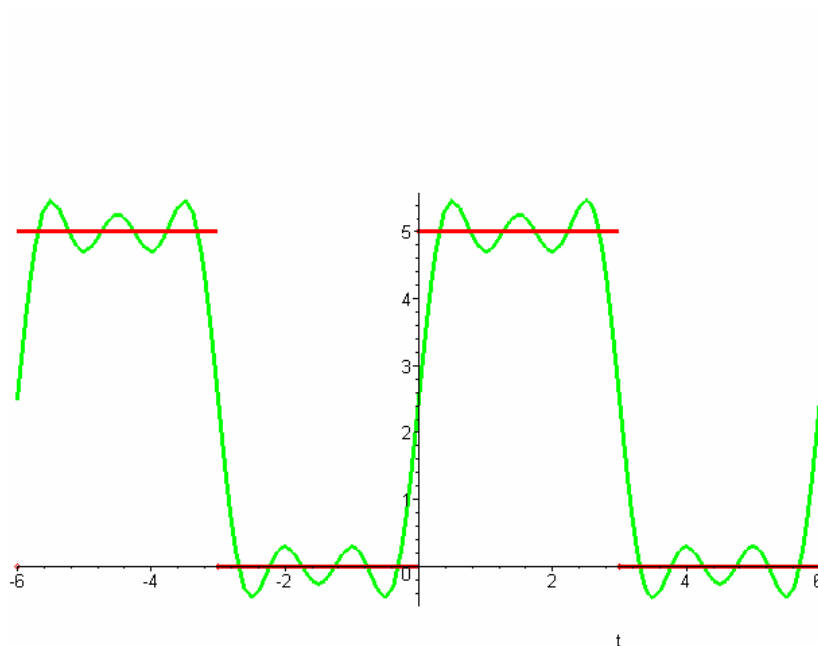


# Fourieranalyse



# FORORD

Dette notat giver en kort indføring i teorien for fourierrækker og fouriertransformation.

Det forudsættes i dette notat, at man har rådighed over “matematiklommeregneren” Ti 89.

Da man må forudse, at man senere vil skulle kunne anvende et egentligt matematikprogram, som angives også nogle af ordrene i programmet “Maple”

Enkelte eksempler er hentet fra lærebogen “Bjarne Hellesen, Mogens Oddershede Larsen: Matematik for Ingeniører bind 3.

Andre noter i samme “serie” er

## **“Matematiske grundbegreber”**

Giver en kort gennemgang af definitioner og regneregler for de mest almindelige reelle funktioner af 1. variabel, disses differentiation og integration,

## **“Vektorer”**

Indhold: 1) Vektorer i plan og rum, 2) Rumgeometri (relationer mellem punkt, linie og plan)  
3) Kurver i plan givet ved en parameterfremstilling

## **“Komplekse tal”**

Indhold: 1) Rektangulær og polær form, eksponentialfunktion, 2) Binom- og andengradsligning  
3) Opløsning af polynomier i faktorer og dekomponering

## **“Matricer og lineære ligninger”**

Indhold: 1) Regneregler for matricer,  
2) Lineære ligningssystemer, herunder løsning af overbestemt ligningssystem

## **“Differentialligninger”**

Indhold: 1) 1. orden (seperable, lineære, numerisk løsning) ,  
2) 2. og højere orden med konstante koefficienter,  
3) Laplacetransformation til løsning af differentialligningssystemer og differentialligninger med forsinkelse

Alle de nævnte notater kan i pdf-format findes på adressen [www.larsen-net.dk](http://www.larsen-net.dk)

januar 2007

Mogens Oddershede Larsen

# INDHOLD

<b>1</b>	<b>Indledning</b> .....	1
<b>2</b>	<b>Reelle Fourierrækker</b> .....	2
2.1	Definition og beregning af Fourierrække .....	2
2.2	Fourierrække for lige og ulige funktioner .....	6
<b>3</b>	<b>Fourierrække på kompleks form</b> .....	10
3.1	Indledning .....	10
3.2	Sammenhæng mellem reelle og komplekse Fourierkoefficienter .....	10
3.3	Udvikling af funktion i Fourierrække på kompleks form .....	10
3.4	Differentialligninger, hvor input er en periodisk funktion .....	13
<b>4</b>	<b>Fouriertransformation</b> .....	17
4.1	Definition af den Fouriertransformerede $X(\omega)$ af $x(t)$ .....	17
4.2	Enhedstrinfunktion og enhedsimpulsfunktion .....	18
4.3	Sammenhæng mellem Fourierkoefficienterne og den Fouriertransformerede .....	20
4.4	Regneregler for Fouriertransformerede .....	20
<b>5</b>	<b>Diskret Fouriertransformation</b> .....	25
5.1	Indledning .....	25
5.2	Definition af diskret Fouriertransformation .....	25
5.3	Beregning af diskret Fouriertransponerede .....	25
5.4	Foldning .....	26
	<b>Opgaver</b> .....	28

*Indhold*

## 1. Indledning

Mange periodiske funktioner kan fremstilles ved en uendelig række bestående af sinusled og cosinusled.

Er funktionens halve periode  $T$ , kan rækken skrives

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n \cdot \omega_0 t) + b_n \sin(n \cdot \omega_0 t)) \text{ eller skrevet helt ud}$$

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t) + \dots + a_n \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + b_n \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) + \dots$$

hvor  $t$  er den uafhængige variable, og vinkelfrekvensen  $\omega_0 = \frac{\pi}{T}$ ,  $n$  er et positivt helt tal og  $a$ 'erne

og  $b$ 'erne er konstanter.

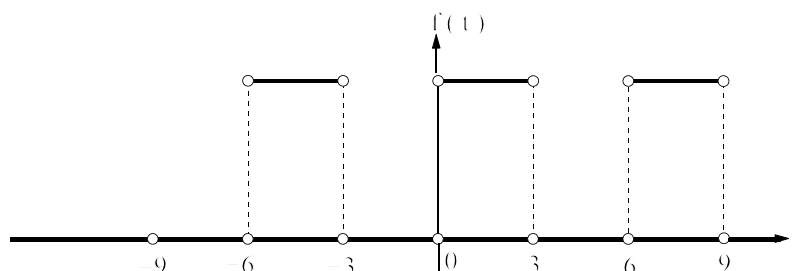
Sådanne rækker kaldes Fourierrækker.

Hvorledes konstanterne bestemmes vil fremgå af afsnit 1.2.

Konstantleddet  $a_0$  kaldes ofte dc-leddet (direct current = jævnstrøm).

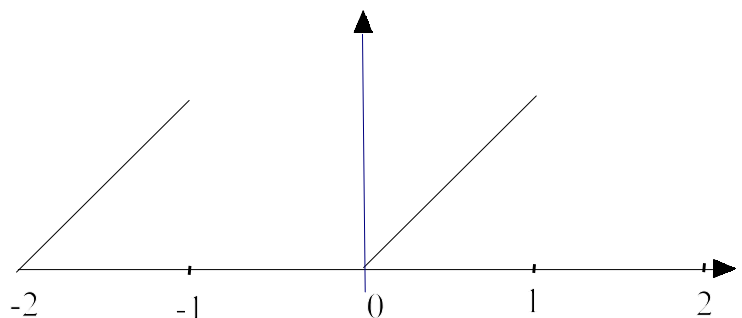
Opfattes  $t$  som tiden, vil rækkens øvrige led repræsentere **svingninger**, som netop ved mange praktiske anvendelser har en direkte fysisk fortolkning, f. eks. elektromagnetiske svingninger, mekaniske svingninger eller lydsvingninger.

Eksempelvis vil en "firkantsimpuls"  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -3 < t < 0 \\ 5 & \text{for } 0 < t < 3 \end{cases}$  med perioden 6 (se figuren)



have fourierrækken  $f(t) = \frac{5}{2} + \frac{10}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \frac{10}{3\pi} \sin(\pi \cdot t) + \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{5 \cdot \pi}{3}t\right) + \dots$

og funktionen  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -1 < t < 0 \\ t & \text{for } 0 < t < 1 \end{cases}$  med perioden 2 (se figuren)



have Fourierrækken

$$f(t) = \frac{1}{4} + \frac{-2}{\pi^2} \left( \frac{\cos(\pi)}{1^2} + \frac{\cos(3\pi)}{3^2} + \frac{\cos(5\pi)}{5^2} + \frac{\cos(7\pi)}{7^2} + \dots \right) + \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin(\pi)}{1} - \frac{\sin(2\pi)}{2} + \frac{\sin(3\pi)}{3} - \dots \right)$$

## 2. Reelle Fourierrækker

Man siger, at funktionen  $f$  (eksempelvis en periodisk "firkant-impuls") er blevet udtrykt som en **superposition** (overlejring) af indbyrdes harmoniske **rene svingninger**, eller man siger, at der er foretaget en **harmonisk analyse** af  $f$ .

Oftest ønsker man rækken skrevet på formen

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \sin(2 \cdot \omega_0 t + \varphi_2) + \dots + A_n \sin(n \cdot \omega_0 t + \varphi_n) + \dots$$

Grundsvingningen er  $A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1)$ , mens  $A_n$  kaldes amplituden for den  $n$ 'te svingning,  $\varphi_n$  er den  $n$ 'te faseforskydning.

For den enkelte svingning vil man ud over amplituden også nævne frekvensen, dvs. antal svingninger pr. tidsenhed.

For at forstå dette begreb betragtes rækken for firkantsimpulsen:

$$f(t) = \frac{5}{2} + \frac{10}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3} t\right) + \frac{10}{3\pi} \sin(\pi \cdot t) + \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{5 \cdot \pi}{3} t\right) + \dots$$

Grundsvingningen  $\frac{10}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3} t\right)$  foretager 1 svingning i løbet af en tidsperiode på  $2T = 6$

(da  $\omega_0 \cdot 2T = \frac{\pi}{3} \cdot 6 = 2\pi$ ). Heraf følger, at frekvensen er  $f_1 = \frac{1}{2T} = \frac{1}{6} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ .

Oversvingningen  $\frac{10}{3\pi} \sin(\pi \cdot t) = \frac{10}{3\pi} \sin\left(3 \frac{\pi}{3} \cdot t\right)$  svinger 3 gange i tiden  $2T = 6$  og har derfor en

frekvens  $f_3 = \frac{3}{2T} = \frac{3}{6} = \frac{3 \cdot \omega_0}{2\pi}$  osv.

Generelt gælder, at  $\sin(\omega \cdot t)$  har vinkelfrekvensen  $\omega$ , frekvensen  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  og en periode (svingningstid)

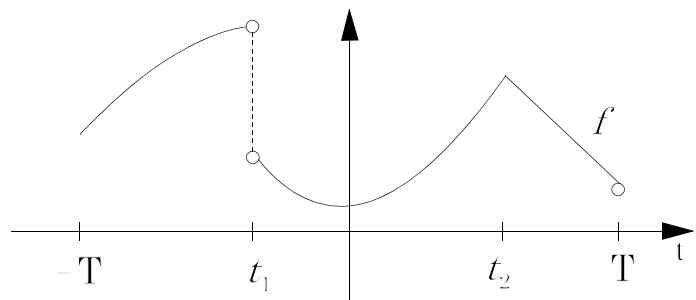
på  $2T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ .

## 2. Reelle Fourierrækker

### 2.1 Definition og beregning af Fourierrække

De funktioner som kan fremstilles ved Fourierrækker, er de såkaldte **stykkevis differentiable funktioner** (se figur 2.1).

Ved en stykkevis differentiable funktion  $f$  defineret i intervallet  $[-T; T]$ , forstås en  $f$ , som er differentiable i hele intervallet på nær højst et endeligt antal punkter. I disse punkter har såvel  $f$  som den afledede funktion  $f'$  dog en grænseværdi såvel fra venstre som fra højre (for endepunkterne dog blot fra den indre side).



**Fig. 2.1.** Stykkevis differentiable funktion  $f$ .

Vi vil i det følgende antage, at  $f$  er en periodisk funktion med periode  $2T$ , og at  $f$  er stykkevis differentiable i intervallet  $[-T; T]$ .

**DEFINITION** af fourierrække.

Ved  $f$ 's fourierrække forstås den uendelige række

$$a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi}{T}t\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \dots + a_n \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) + \dots$$

hvor

$$a_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt,$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt, \quad b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \quad \text{og } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Rækken skrives kort } f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) \right)$$

Konstanterne  $a_n$  og  $b_n$  kaldes Fourierkoefficienterne.

**Forklaring af formlerne for koefficienterne  $a_n$  og  $b_n$ .**

Hvis fourierrækken er konvergent med summen  $f(x)$  må koefficienterne nødvendigvis være bestemt ved de angivne

$$\text{formler. Dette indses ved at multiplicere ligningen } f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) \right)$$

med samme funktion, som indgår i det led, der indeholder  $a_n$  eller  $b_n$ , hvorefter der integreres .

Multipliceres således på begge sider med  $\cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right)$  og integreres fra  $-T$  til  $T$ , fås

$$\int_{-T}^T f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt = \int_{-T}^T a_0 \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_{-T}^T a_k \cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt + \int_{-T}^T b_k \sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt \right)$$

For  $n \neq k$  og  $n > 0$  fås (ved benyttelse af Maple eller Ti 89), at de ovennævnte integraler på højre side af lighedstegnet er 0.

Ligningen reduceres derfor til

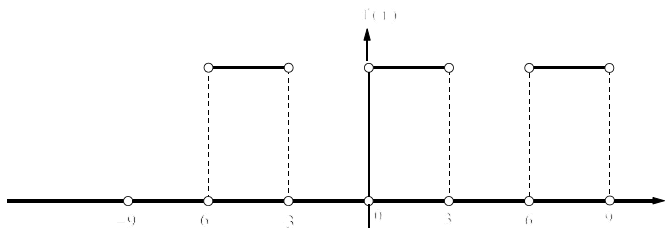
$$\int_{-T}^T f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt = \int_{-T}^T a_n \left( \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) \right)^2 dt + \int_{-T}^T b_n \sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt.$$

$$\text{Ved integration fås nu } \int_{-T}^T f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt = a_n \cdot T + 0 = a_n \cdot T. \text{ Heraf fås } a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Tilsvarende findes  $a_0$  (ved at multiplicere med  $\cos(0 \cdot t)$ ) og  $b_n$  (ved at multiplicere med  $\sin\left(\frac{n\pi}{T}t\right)$ ).

**Eksempel 2.1 Udvikling af en funktion i en Fourierrække.**

Et periodisk firkantssignal med perioden 6 er defineret ved  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -3 < t < 0 \\ 5 & \text{for } 0 < t < 3 \end{cases}$



1) Bestem Fourierkoefficienterne  $a_0$  samt  $a_n$  og  $b_n$  for  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ .

2) Lad  $F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^5 \left( a_n \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{T} t\right) \right)$  altså summen af led til og med  $n = 5$

Tegn (ved hjælp af lommeregner eller Maple) grafen for  $f(t)$  og  $F(t)$  i samme koordinatsystem.

3) Skitser amplitudespektret for  $f(t)$ , hvor amplituden  $A$  er defineret som  $A = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

“Energien” i signalet  $f(t)$  over en periode er givet ved  $P = \int_{-T}^T (f(t))^2 dt$

“Energien” i signalet  $F(t)$  over en periode er givet ved  $Q = T \cdot \left[ 2a_0^2 + \sum_{n=1}^5 (a_n^2 + b_n^2) \right]$

Den middelfejl  $E$  som opstår, når funktionen  $f(t)$  erstattes af delsummen  $F(t)$  er  $E = P - Q$ .

4) Bestem “energiene”  $P, Q$  og middelfejlen  $E$ . Angiv i % den andel af “energien i signalet”  $f(t)$  der repræsenteres af delsignalet  $F(t)$ .

**Løsning:**

1) Vi finder  $a_0 = \frac{1}{2 \cdot 3} \int_{-3}^3 f(t) dt = 0 + \frac{1}{6} \int_0^3 5 dt = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$ .

$$a_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(t) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{3} t\right) dt = 0 + \frac{1}{3} \int_0^3 5 \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{3} t\right) dt = 0$$

$$b_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(t) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{3} t\right) dt = 0 + \frac{1}{3} \int_0^3 5 \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{3} t\right) dt = \frac{-5(\cos(n \cdot \pi) - 1)}{n \cdot \pi}$$

(lommeregner benyttet ved integrationen)

Da  $\cos(n \cdot \pi) = (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{for } n \text{ ulige} \\ 1 & \text{for } n \text{ lige} \end{cases}$  fås  $b_n = \begin{cases} \frac{10}{n\pi} & \text{for } n \text{ ulige} \\ 0 & \text{for } n \text{ lige} \end{cases}$

Vi har derfor  $a_0 = \frac{5}{2}, a_1 = 0, b_1 = \frac{10}{\pi}, a_2 = 0, b_2 = 0, a_3 = 0, b_3 = \frac{10}{3\pi}, a_4 = 0, b_5 = \frac{2}{\pi}$



2) Vi har  $F(t) = \frac{5}{2} + \frac{10}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \frac{10}{3\pi} \sin(\pi \cdot t) + \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{5 \cdot \pi}{3}t\right)$

Tegning:

Maple:   
 > w:=piecewise(-6<t and t<-3,5,t<0,0,t<3,5,t<6,0);  
 > u:=5/2+10/Pi\*sin(Pi/3\*t)+10/(3\*Pi)\*sin(Pi\*t)+2/Pi\*sin(5\*Pi/3\*t);  
 plot([w,u],t=-6..6,discont=true);

Ti 89: Ideen er, at man definerer en funktion for hvert "stykke" af den stykkevis differentiable funktion og så tegner i samme koordinatsystem.

Y=, y1(x)= 5/2+10/ π \*sin( π /3\*x)+10/(3\* π )\*sin( π \*x)+2/ π \*sin(5\* π /3\*x)

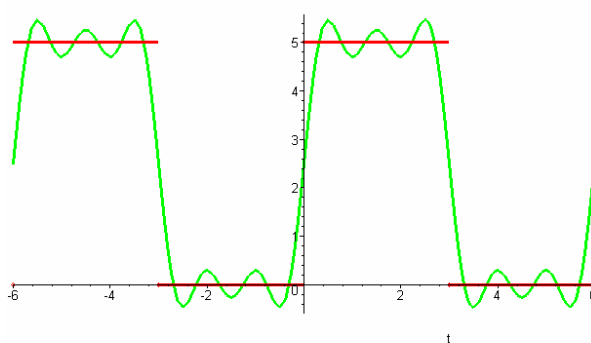
Y=, y2(x)=5+0\*x | x<-3 and x>-6

Y=, y3(x)=5+0\*x | x<3 and x>0

Marker y1, y2 og y3

Vælg GRAPH så bliver de markerede funktioner tegnet i samme koordinatsystem

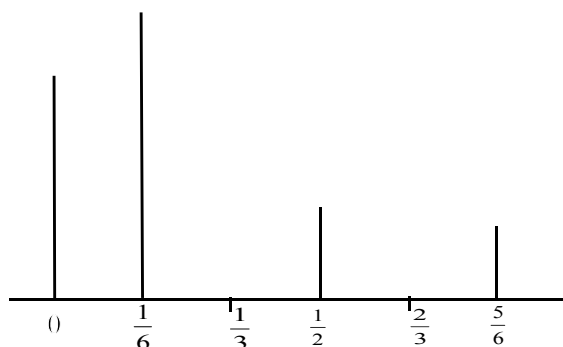
Vinduet indstilles nu, så man får afbildet det ønskede område.



Ved sammenligning med grafen for  $f$  ses, at nok ligner de hinanden i hovedstrukturen, men umiddelbart bør nok medtages lidt flere led.

3) Vi har nu følgende tabel:

$n$	0	1	2	3	4	5
frekvens $f = \frac{n}{2T} = \frac{n}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6} = 0.833$
amplitude $A = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ lige} \\ \frac{10}{n\pi} & \text{for } n \text{ ulige} \end{cases}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{10}{\pi} = 3.18$	0	$\frac{10}{3\pi} = 1.061$	0	$\frac{10}{5\pi} = 0.6366$



$$4) P = \int_{-3}^3 (f(t))^2 dt = 0 + \int_0^3 5^2 dt = \underline{\underline{75}}$$

$$Q = T \cdot \left[ 2a_0^2 + \sum_{n=1}^5 (a_n^2 + b_n^2) \right] = 3 \cdot \left[ 2 \cdot \left( \frac{5}{2} \right)^2 + 0^2 + \left( \frac{10}{\pi} \right)^2 + 0^2 + \left( \frac{10}{3\pi} \right)^2 + 0^2 + \left( \frac{2}{\pi} \right)^2 \right] = \underline{\underline{72.4896}}$$

$$E = P - Q = \underline{\underline{2.510}} \quad \text{Relativ fejl} = \frac{E}{P} = \frac{2.510}{75} = \underline{\underline{3.35\%}}$$



**Konvergens af Fourierrække i et diskontinuitetspunkt.**

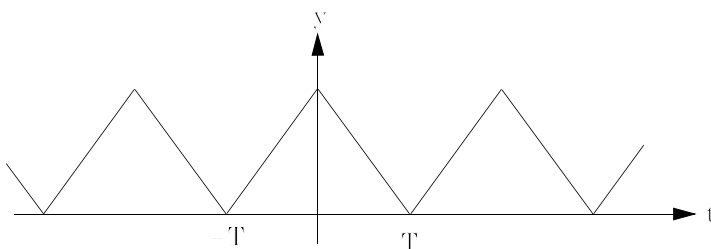
Som det fremgår af de to grafer for  $f(t)$  og  $F(t)$  i eksempel 2.1, synes fourierrækken i springpunktet  $t = 0$  at konvergere mod “midtpunktet”

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{5 + 0}{2} = \frac{5}{2}$$

Det kan vises, at dette gælder generelt.

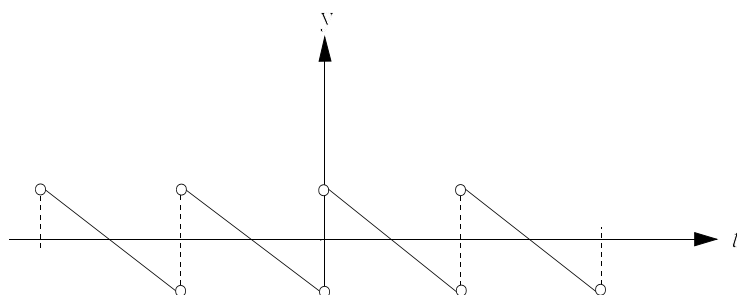
**2.2 Fourierrækker for lige og ulige funktioner**

Hvis  $f(t)$  er en lige funktion (se figur 2.1), vil vi vise, at Fourierrækken for  $f$  er en “ren” cosinusrække.



**Fig 2.1** Lige funktion, dvs.  $f(-t) = f(t)$   
(grafen symmetrisk om y-aksen)

Hvis  $f(t)$  er en ulige funktion (se figur 2.2), vil vi vise, at Fourierrækken for  $f$  er en “ren” sinusrække.



**Fig 2.2** Ulige funktion, dvs.  $f(-t) = -f(t)$   
(grafen symmetrisk om begyndelsespunktet (0, 0)).

Dette fremgår af følgende sætning.

**SÆTNING 2.1** (Fourierrække for lige og ulige funktion).

Hvis  $f$  er en lige funktion med perioden  $2T$ , har  $f$  Fourierrækken

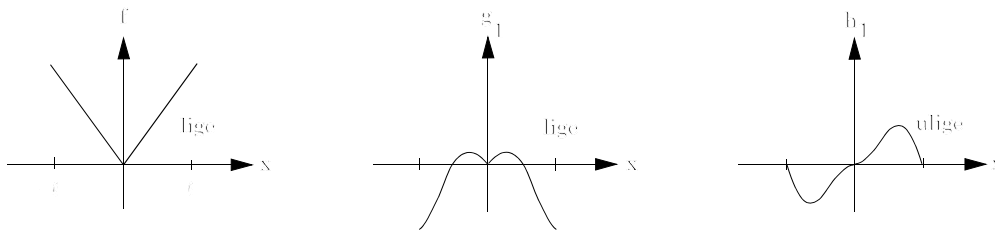
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{T} t\right)$$

hvor  $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$  og  $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{T} t\right) dt$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Hvis  $f$  er en ulige funktion med perioden  $2T$ , har  $f$  Fourierrækken

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{T} t\right), \text{ hvor } b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{T} t\right) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Bevis:  $g_n(t) = f(t) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{T} t\right)$  og  $h_n(t) = f(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{T} t\right)$ . Er  $f$  lige, dvs.  $f(t) = f(-t)$ , fås ved indsættelse, at  $g_n(-t) = g_n(t)$  og  $h_n(-t) = -h_n(t)$ , dvs.  $g_n$  er lige og  $h_n$  er en ulige funktion.



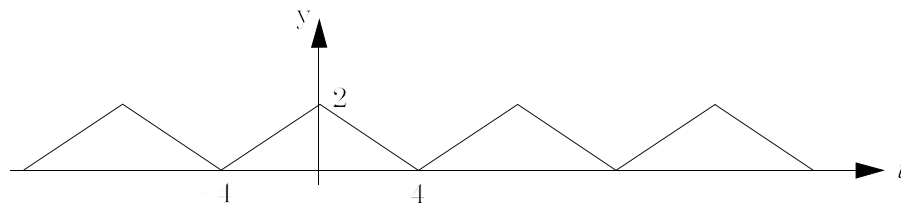
Af symmetri Grunde (se på de tilsvarende arealer) må  $\int_{-T}^T g_n(t) dt = 2 \int_0^T g_n(t) dt$  og  $\int_{-T}^T h_n(t) dt = 0$ .

Hermed er sætningen vist, for  $f$  lige.

Er  $f$  ulige, kan beviset føres på ganske samme måde.

**Eksempel 2.2 Fourierrække for lige funktion.**

Lad en periodisk funktion  $f$  have følgende graf



1) Bestem Fourierkoefficienterne  $a_0$  samt  $a_n$  og  $b_n$  for  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ .

2) Lad  $F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^5 \left( a_n \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{T} t\right) \right)$  altså summen af led til og med  $n = 5$

Skitser ved hjælp af lommeregner eller Maple grafen for  $F(t)$ , og sammenlign den med den i punkt 1) tegnede graf for  $f$ .

**Løsning:**

1) Det ses af figuren, at  $f$  er en lige funktion med perioden 8 og at  $f(t) = -\frac{1}{2}t + 2$  for  $0 \leq t \leq 4$

Rækken er derfor en ren cosinusrække.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{4} t\right)$$

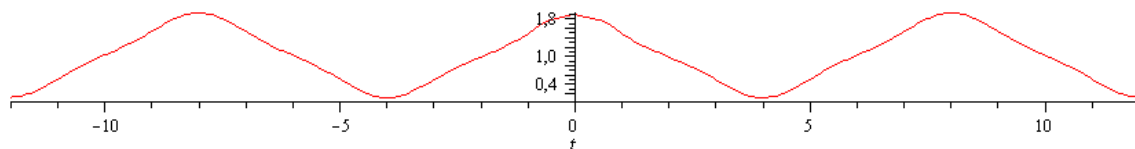
hvor  $a_0 = \frac{1}{4} \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}t + 2\right) dt = 1$  og

$$a_n = \frac{2}{4} \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}t + 2\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{4} t\right) dt = \frac{-4(\cos(n \cdot \pi) - 1)}{n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Heraf fås:  $a_0 = 1, a_1 = \frac{8}{\pi^2}, a_2 = 0, a_3 = \frac{8}{9\pi^2}, a_4 = 0, a_5 = \frac{8}{25\pi^2}$

2)  $F(t) = 1 + \frac{8}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{4} t\right) + \frac{8}{9\pi^2} \cos\left(\frac{3\pi}{4} t\right) + \frac{9}{25\pi^2} \cos\left(\frac{5\pi}{4} t\right)$

Tegning: Maple: `plot(1+8/Pi^2*cos(Pi/4*t)+8/(9*Pi^2)*cos(3/4*Pi*t)+8/(25*Pi^2)*sin(5*Pi/4*t), t=-12..12);`

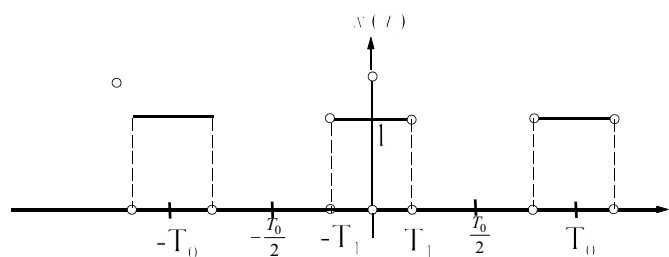


**Eksempel 2.3 (periodisk firkantsimpuls)**

Det periodiske firkantsignal vist på figuren er defineret over en periode som

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } -T_1 < t < T_1 \\ 0 & \text{for } T_1 < t < \frac{T_0}{2} \wedge -\frac{T_0}{2} < t < T_1 \end{cases}$$

er periodisk med perioden  $T_0$  (se figuren).



- 1) Find fourierkoefficienterne
- 2) Beregn amplitudespektret i det tilfælde, hvor  $T_0 = 8 \cdot T_1$ .

**Løsning:**

- 1) Det ses, at  $x(t)$  er en lige funktion med perioden  $T_0$

Vi har derfor at rækken er en ren cosinusrække. Idet  $T = \frac{T_0}{2}$  i formlen fås

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2 \cdot n \cdot \pi}{T_0} t\right) \quad \text{hvor } a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) dt = \frac{2}{T_0} \left( \int_0^{T_1} 1 dt + \int_{T_1}^{\frac{T_0}{2}} 0 dt \right) = \frac{2T_1}{T_0} \text{ og}$$

$$a_n = \frac{2 \cdot 2}{T_0} \int_0^{T_1} 1 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot n \cdot \pi}{T_0} t\right) dt = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot n \cdot \pi \cdot T_1}{T_0}\right)}{n \cdot \pi}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Sættes  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  (grundvinkelfrekvensen) fås

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_0 \cdot n \cdot t), \quad \text{hvor } a_0 = \frac{2T_1}{T_0} \text{ og } a_n = \frac{2 \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot T_1)}{n \cdot \pi}, \quad n = 1, 2, \dots$$

- 2) Sættes  $T_0 = 8 \cdot T_1$  fås  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{4T_1}$  og dermed  $a_n = \frac{2 \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right)}{n \cdot \pi}, n = 1, 2, \dots$

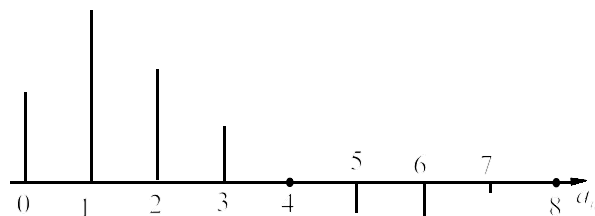
$$a_0 = \frac{2T_1}{T_0} = \frac{1}{4}, \text{ og } a_1 = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}, \quad a_2 = \frac{1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi} = \frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{3\pi} = \frac{\sqrt{2}}{3\pi},$$

$$a_4 = \frac{2 \cdot \sin(\pi)}{4\pi} = 0, \quad a_5 = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{5\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{5\pi}, \quad a_6 = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{6\pi} = -\frac{2}{6\pi}, \quad a_7 = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)}{7\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{7\pi},$$

$$a_8 = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)}{8\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{8\pi}, \quad a_9 = \frac{2 \cdot \sin(2\pi)}{8\pi} = 0,$$

- 3) Vi har følgende tabel:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$a_n$	0.25	$\frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0.45$	$\frac{1}{\pi} = 0.31$	$\frac{\sqrt{2}}{3\pi} = 0.15$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{5\pi} = -0.09$	$-\frac{1}{3\pi} = -0.10$	$-\frac{\sqrt{2}}{7\pi} = -0.06$	0



### 3. Fourierrække på kompleks form.

#### 3.1. Indledning

En Fourierrække på kompleks form for en periodisk funktion  $x(t)$  med periode  $2T$  kan skrives

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}, \quad \text{hvor } \omega_0 = \frac{\pi}{T} \quad \text{og de komplekse koefficienter er bestemt ved}$$

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 t} dt$$

Formlen fremkommer ved i Fourierrækken  $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + b_n \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t))$

at indsætte cos og sin givet ved Eulers formler:  $\cos(u) = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2}$ ,  $\sin(u) = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2 \cdot i}$ .

Fordelene ved at gå over til den komplekse form er dels, at mange beregninger bliver meget lettere (jævnfør eksempel 3.3) og dels, at kun et tal  $c_n$  både angiver et mål for amplituden ( $|c_n|$ ) og for faseforskydningen ( $\arg(c_n)$ ).

Ulempen er, at resultaterne bliver mindre overskuelige.

#### 3.2. Sammenhæng mellem reelle og komplekse Fourierkoefficienter.

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + b_n \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}$$

Fra reel til kompleks:  $c_0 = a_0$ ,  $c_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$ ,  $c_{-n} = \bar{c}_n$ ,  $|c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  for  $n = 1, 2, 3, \dots$

Fra kompleks til reel:  $a_0 = c_0$ ,  $a_n = 2 \cdot \text{Re}(c_n)$ ,  $b_n = -2 \cdot \text{IM}(c_n)$

Skrives Fourierrækken  $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t + \varphi_n))$

er amplituden  $A_n = 2|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  og faseforskydningen  $\varphi_n = \text{Arg}(c_n) + \frac{\pi}{2} = \text{Arg}(b_n + i a_n)$

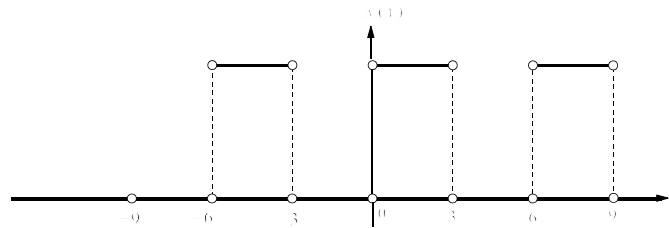
for  $n = 1, 2, 3, \dots$

#### 3.3. Udvikling af funktion i Fourierrække på kompleks form.

De følgende eksempler viser dels, hvordan man kan udvikle en periodisk funktion i en fourierrække på kompleks form, dels hvorledes man løser en lineær differentialligning, hvor "input" er en periodisk funktion.

### Eksempel 3.1 Periodisk firkantssignal

Et periodisk firkantssignal med perioden 6 er defineret ved  $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -3 < t < 0 \\ 5 & \text{for } 0 < t < 3 \end{cases}$



1) Bestem ud fra definitionen de komplekse fourierkoefficienter  $c_n$

hvor  $n$  er alle hele tal til og med  $\pm 5$ .

2) Man fandt i eksempel 2.1 de reelle fourierkoefficienter

$$a_0 = \frac{5}{2}, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = \frac{10}{\pi}, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad b_3 = \frac{10}{3\pi}, \quad a_4 = 0, \quad b_5 = \frac{2}{\pi}$$

Find på det grundlag de komplekse fourierkoefficienter  $c_n$  hvor  $n$  er alle hele tal til og med  $\pm 5$ .

Kontroller, at man har fået samme resultat.

3) Opskriv den komplekse fourierrække svarende til de i spørgsmål 1) angivne værdier af  $n$ .

4) Tegn amplitudespektret for den komplekse fourierrække

#### Løsning:

1) Idet  $T = 3$  og  $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$  fås  $c_0 = \frac{1}{6} \int_{-3}^3 x(t) \cdot e^{0} dt = \frac{1}{6} \int_0^3 5 dt = \frac{1}{6} 15 = \frac{5}{2}$

$$c_n = \frac{1}{6} \int_{-3}^3 x(t) \cdot e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} dt = \frac{1}{6} \int_0^3 5 \cdot e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} dt = \frac{5}{6} \left[ \frac{e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}}{-i \cdot n \cdot \omega_0} \right]_0^3 = \frac{5}{6} \left( \frac{e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot 3} - 1}{-i \cdot n \cdot \omega_0} \right) = \frac{5}{2} \frac{1 - e^{-in\pi}}{in\pi}$$

Da  $e^{-in\pi} = (e^{-i\pi})^n = (-1)^n$  fås  $c_n = \frac{5}{2} \frac{1 - e^{-in\pi}}{in\pi} = \frac{5}{2} \frac{1 - (-1)^n}{in\pi} = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ lige} \\ \frac{5}{in\pi} & \text{for } n \text{ ulige} \end{cases}$

$$c_1 = \frac{5}{\pi i} = -\frac{5i}{\pi}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{5}{3i\pi} = -\frac{5i}{3\pi}, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = \frac{5}{5i\pi} = -\frac{i}{\pi}$$

$$c_{-1} = \frac{5i}{\pi}, \quad c_{-2} = 0, \quad c_{-3} = \frac{5i}{3\pi}, \quad c_{-4} = 0, \quad c_{-5} = \frac{i}{\pi}$$

2)  $c_0 = a_0 = \frac{5}{2}, \quad c_1 = \frac{a_1 - ib_1}{2} = \frac{0 - i \frac{10}{\pi}}{2} = -\frac{5i}{\pi}, \quad c_{-1} = \bar{c}_1 = \frac{5i}{\pi},$

$$c_2 = \frac{0 - i0}{2} = 0, \quad c_{-2} = \bar{c}_2 = 0, \quad c_3 = \frac{0 - i \frac{10}{3\pi}}{2} = -\frac{5i}{3\pi}, \quad c_{-3} = \bar{c}_3 = \frac{5i}{3\pi},$$

$$c_4 = \frac{0 - i0}{2} = 0, \quad c_{-4} = \bar{c}_4 = 0, \quad c_5 = \frac{0 - i \frac{2}{\pi}}{2} = -\frac{i}{\pi}, \quad c_{-5} = \bar{c}_5 = \frac{i}{\pi},$$

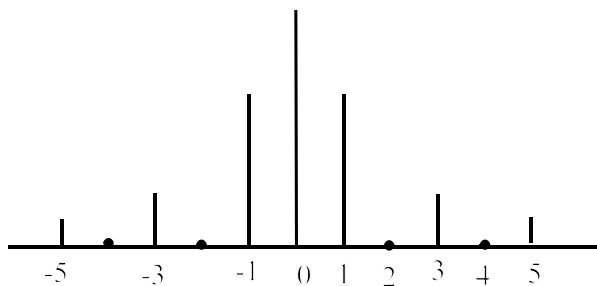
Det ses, at vi fik de samme værdier ved de to metoder.

3. Fourierrække på kompleks form

$$3) x(t) = \dots + \frac{i}{\pi} e^{-i\frac{5\pi}{3}t} + \frac{5i}{3\pi} e^{-i\frac{3\pi}{3}t} + \frac{5i}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{3}t} + \frac{5}{2} - \frac{5i}{\pi} e^{i\frac{\pi}{3}t} - \frac{5i}{3\pi} e^{i\frac{3\pi}{3}t} - \frac{i}{\pi} e^{i\frac{5\pi}{3}t} - \dots$$

4)

$n$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$ c_n $	$\frac{1}{\pi} = 0.32$	0	$\frac{5}{3\pi} = 0.53$	0	$\frac{5}{\pi} = 1.59$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{\pi} = 1.59$	0	$\frac{5}{3\pi} = 0.53$	0	$\frac{1}{\pi} = 0.32$



I eksempel 2.1 var tegnet de tilsvarende de reelle fourierkoefficienter, og da et sådant amplitudespektrum er mere anskueligt end de komplekse koefficienter, vil man ofte se dette anvendt eventuelt samtidigt med et fasediagram.



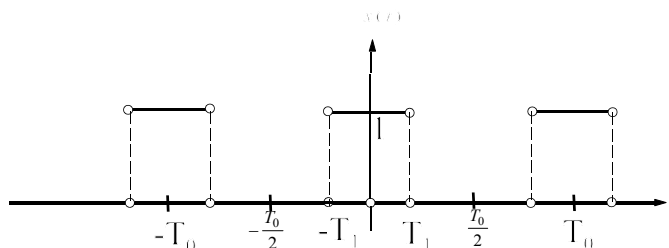
I eksempel 2.4 beregnede vi de reelle fourierkoefficienter. Vi vil nu gentage beregningerne for det samme problem.

### Eksempel 3.2 (firkantsimpuls generelt)

Det periodiske firkantsignal vist på figuren er defineret over en periode som

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } -T_1 < t < T_1 \\ 0 & \text{for } T_1 < t < \frac{T_0}{2} \wedge -\frac{T_0}{2} < t < T_1 \end{cases}$$

er periodisk med perioden  $T_0$  (se figuren)



- 1) Find forurierkoefficienterne
- 2) Beregn amplitudespektret i det tilfælde, hvor  $T_0 = 8 \cdot T_1$ .



**Løsning:**

Idet perioden er  $T_0 = 2T$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  fås

$$1) c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T}^T x(t) e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} 1 \cdot e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} dt$$

$$n = 0: c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T_0}$$

$$n \neq 0: c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} 1 \cdot e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} dt = \frac{1}{T_0} \left[ \frac{e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}}{-i \cdot n \cdot \omega_0} \right]_{-T_1}^{T_1} = \frac{1}{T_0} \frac{-1}{i \cdot n \cdot \omega_0} (e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot T_1} - e^{i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot T_1})$$

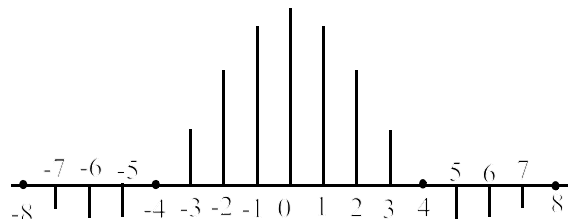
$$= \frac{1}{T_0} \frac{2}{n \cdot \omega_0} \left( \frac{e^{i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot T_1} - e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot T_1}}{2i} \right) = \frac{1}{T_0} \frac{2}{n \cdot \omega_0} \sin(n \cdot \omega_0 \cdot T_1) = \frac{1}{n \cdot \pi} \sin(n \cdot \omega_0 \cdot T_1)$$

Den sidste omskrivning skyldes Eulers formel  $\sin(u) = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2 \cdot i}$ .

Sammenlignes med resultatet i eksempel 2.4 ses, at på nær  $a_0$  så er  $a_n = 2 \cdot c_n$  som forventet.

2) Sættes  $T_0 = 8 \cdot T_1$  fås  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{4T_1}$  og dermed  $c_n = \frac{1}{n \cdot \pi} \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $n =$  helt tal  $\neq 0$

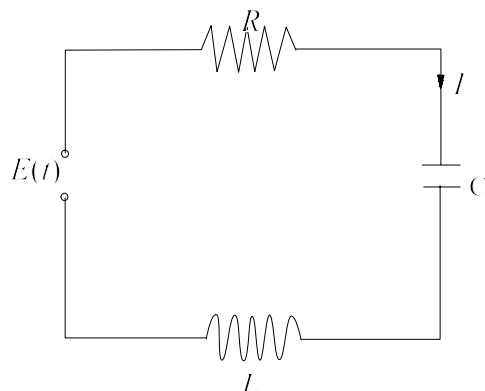
$n$	0	$\pm 1$	$\pm 2$	$\pm 3$	$\pm 4$	$\pm 5$	$\pm 6$	$\pm 7$	$\pm 8$
$c_n$	0.25	$\frac{\sqrt{2}}{2\pi} = 0.23$	$\frac{1}{2\pi} = 0.16$	$\frac{\sqrt{2}}{6\pi} = 0.08$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{10\pi} = -0.05$	$-\frac{1}{6\pi} = -0.05$	$-\frac{\sqrt{2}}{14\pi} = -0.03$	0



**3.4. Differentialligninger, hvor input er en periodisk funktion**

Har man et elektrisk kredsløb som vist på figuren vil sammenhængen mellem input  $E(t)$  og output  $I(t)$  være bestemt ved differentialligningen

$$L \frac{d^2 I}{d t^2} + R \frac{d I}{d t} + \frac{1}{C} I = \frac{d E}{d t}$$



### 3. Fourierrække på kompleks form

Er højre side af differentialligningen en periodisk funktion, vil man sædvanligvis være interesseret i at finde en såkaldt stationær løsning, dvs. en partikulær løsning.

Den homogene løsning vil i praksis sædvanligvis være af formen  $e^{-at} f(t)$  og vil derfor ret hurtigt "dø ud", så man kun har den inhomogene (stationære) løsning tilbage.

For den stationære løsnings vedkommende er det igen sædvanligvis især amplitudespektret der er af interesse, og det findes nemmest ved at benytte fourierrækker på kompleks form.

Til løsning benyttes følgende regler:

#### Differentiationsregel for fourierkoefficienter

Lad  $f(t)$  have den komplekse fourierkoefficient  $c_n$ .

Der gælder da:  $f'(t)$  har fourierkoefficienten  $i \cdot n \cdot c_n$ ,  $f''(t)$  har  $(i \cdot n)^2 c_n$ , osv.

#### Linearitetsregel for fourierkoefficienter

Lad  $f(t)$  og  $g(t)$  have de komplekse fourierkoefficient  $c_n$  og  $k_n$ .

Der gælder da, at  $a \cdot f(t) + b \cdot g(t)$  har fourierkoefficient  $a \cdot c_n + b \cdot k_n$

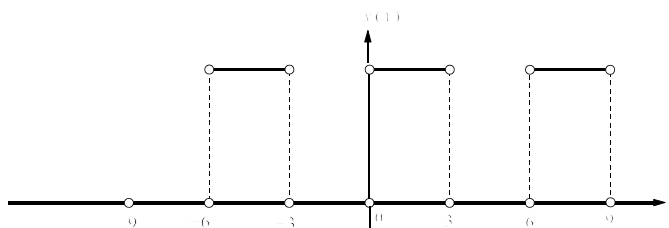
#### Eksempel 3.3 . Løsning af differentialligning.

Lad der være givet differentialligningen

$$y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = x(t)$$

hvor input  $x(t)$  er det i eksempel 3.1 angivne periodiske firkantssignal med perioden 6

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -3 < t < 0 \\ 5 & \text{for } 0 < t < 3 \end{cases}$$



Lad den stationære løsning  $y(t)$  have de komplekse Fourierkoefficienter  $c_n$ , dvs.  $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \cdot n \cdot \omega_0 t}$ .

1) Find værdien af  $|c_n|$  for  $n = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7$  med 3 decimaler.

2) Output  $y(t)$  kan nu skrives  $y(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega_0 t + \varphi_2) + A_3 \sin(3\omega_0 t + \varphi_3) + \dots$

hvor  $A_n = 2|c_n|$ .

Tegn amplitudespektret  $A_n$  for  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  og afgør herudfra hvilken/hvilke amplitude/amplituder, der er de dominerende.

#### Løsning:

1) Lad  $k_n$  være Fourierkoefficient for input  $x(t)$

For enhver værdi af  $n$  må fourierkoefficienten på venstre side af differentialligningen være lig med højre side.

Af linearitetsregel og differentiationsregel fås:

$$(in)^2 c_n + 4 \cdot (in)c_n + 13c_n = k_n \Leftrightarrow c_n = \frac{1}{(in)^2 + 4 \cdot (in) + 13} k_n$$

$$H(n) = \frac{1}{(in)^2 + 4in + 13}$$

kaldes **overføringsfunktionen** for differentialligningen.

I eksempel 3.1 fandt vi  $k_0 = \frac{5}{2}$  og  $k_n = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ lige } \neq 0 \\ \frac{5}{in\pi} & \text{for } n \text{ ulige} \end{cases}$

$$|c_n| = |H(n)| \cdot |k(n)|$$

$$\text{Vi har } |H(n)| = \frac{1}{|(in)^2 + 4in + 13|} = \frac{1}{|(-n^2 + 13) + i(4n)|} = \frac{1}{\sqrt{(-n^2 + 13)^2 + (4n)^2}}$$

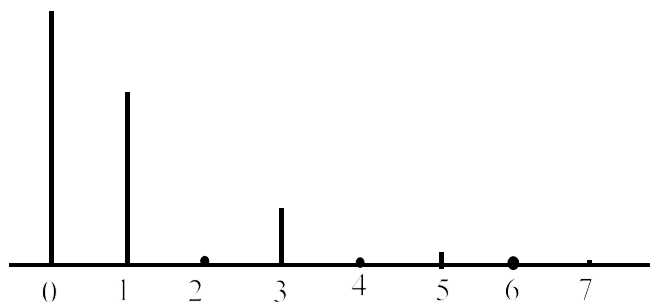
$$\text{og } |k_n| = \begin{cases} \frac{5}{2} & \text{for } n = 0 \\ 0 & \text{for } n \text{ lige} \\ \frac{5}{n\pi} & \text{for } n \text{ ulige} \end{cases} \text{ dvs. } |c_n| = \begin{cases} \frac{5}{26} & \text{for } n = 0 \\ 0 & \text{for } n \text{ lige} \\ \frac{5}{n\pi\sqrt{(13-n^2)^2 + 14n^2}} & \text{for } n \text{ ulige} \end{cases}$$

Dette giver følgende tabel:

$n$	0	$\pm 1$	$\pm 2$	$\pm 3$	$\pm 4$	$\pm 5$	$\pm 6$	$\pm 7$
$ c_n $	$\frac{5}{26} = 0.19$	0.127	0	0.044	0	0.014	0	0.005

2) Vi har nu følgende tabel over A'erne:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$A_n = 2 c_n $	0.385	0.254	0	0.088	0	0.024	0	0.010



### 3. Fourierrække på kompleks form

Det ses, at på nær konstantleddet, så er de dominerende amplituder  $A_1$  og  $A_3$  svarende til leddene  $0.254 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \varphi_1\right)$  og  $0.088 \cdot \sin\left(3\frac{\pi}{3}t + \varphi_3\right)$ . ◆

Det er klart, at output udover input også afhænger af "systemet", dvs. den homogene løsning til differentialligningen  $y''(t) + ay'(t) + by(t) = x(t)$

Er "dæmpningen"  $a$  lille og en af frekvenserne for input  $x(t)$  tæt ved frekvensen for en homogen løsning, så vil der kunne opstå en "resonansvirkning", dvs. en meget stor amplitude.

Den følgende eksempel illustrerer dette.

#### Eksempel 3.4 . Resonans

Lad være givet differentialligningen  $y''(t) + 0.01y'(t) + 9y(t) = x(t)$ , hvor input  $x(t)$  er den samme som i eksempel 3.3, men nu er "dæmpningen" nedsat fra 4 til 0.01, dvs. den homogene løsning aftager meget langsomt. Endvidere er den homogene løsnings vinkelfrekvens tæt ved 3, da karakterligningen er

$$\lambda^2 + 0.01\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-0.01 \pm \sqrt{(0.01)^2 - 4 \cdot 9}}{2} \approx -0.0005 \pm 3i \text{ og}$$

den homogene løsning derfor af typen  $y_h(t) = Ce^{-0.0005t} \sin(3t + \varphi)$ .

Man må derfor forvente en resonansvirkning.

Differentialligningens overføringsfunktion er

$$H(n) = \frac{1}{(in)^2 + 0.01in + 9} \text{ og } |H(n)| = \frac{1}{|(-n^2 + 9) + i(0.01n)|} = \frac{1}{\sqrt{(-n^2 + 9)^2 + (0.01n)^2}}$$

$$\text{Som før er } |k_n| = \begin{cases} \frac{5}{2} & \text{for } n = 0 \\ 0 & \text{for } n \text{ lige} \\ \frac{5}{n\pi} & \text{for } n \text{ ulige} \end{cases}$$

$$|c_n| = |H(n)| \cdot |k(n)| = \begin{cases} \frac{5}{26} & \text{for } n = 0 \\ 0 & \text{for } n \text{ lige} \\ \frac{5}{n\pi \sqrt{(9 - n^2)^2 + 0.0001 \cdot n^2}} & \text{for } n \text{ ulige} \end{cases}$$

Vi har nu følgende tabel over  $A$ 'erne:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$A_n = 2 c_n $	0.398	0.212	0	33.37	0	0.0398	0	0.0114

Vi ser som forventet, at  $A_3$  er det helt dominerende led. ◆

## 4. Fouriertransformation

### 4.1. Definition af den Fouriertransformerede $X(\omega)$ af $x(t)$

Input  $x(t)$  har vi hidtil antaget var periodisk med perioden  $2T$ . I dette afsnit vil vi betragte den situation hvor  $x(t)$  **ikke** er periodisk. En sådan funktion kan formelt set udledes ud fra en Fourier-række på kompleks form ved at man lader  $T$  blive meget stor (gå mod  $\infty$ )

En Fourierrække på kompleks form for en periodisk funktion  $x(t)$  med periode  $2T$  kan skrives

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \quad , \quad \text{hvor } \omega_0 = \frac{\pi}{T} \quad \text{og de komplekse koefficienter er bestemt ved}$$

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 t} dt \quad .$$

Lad  $\omega_n = n\omega_0$ ,  $\Delta\omega = \omega_0$  og  $X(\omega_n) = c_n \cdot 2T$  .

Indsættes disse udtryk i Fourierrækken ovenfor fås

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega_n) \cdot \frac{1}{2T} e^{i \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega_n) \cdot e^{i \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \Delta\omega \quad ,$$

$$\text{hvor } X(\omega_n) = \int_{-T}^T x(t) \cdot e^{-i \cdot \omega_n t} dt \quad .$$

Lader vi nu  $T \rightarrow \infty$  kan man vise, at den ikke periodiske funktion  $x(t)$  kan skrives som et

$$\text{“Fourierintegral “} \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot d\omega \quad (1),$$

$$\text{hvor } X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt \quad . \quad (2)$$

Integralet er grænseværdien  $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt$  , og det forudsættes, at  $x(t)$  er stykkevis differentiablel .

Man siger, at  $X(\omega)$  er den **Fouriertransformerede** af signalet  $x(t)$ .

Kendes den Fouriertransformerede  $X(\omega)$  kan man gendanne det oprindelige signal  $x(t)$  ved den **inverse Fouriertransformerede** (formel (1)).

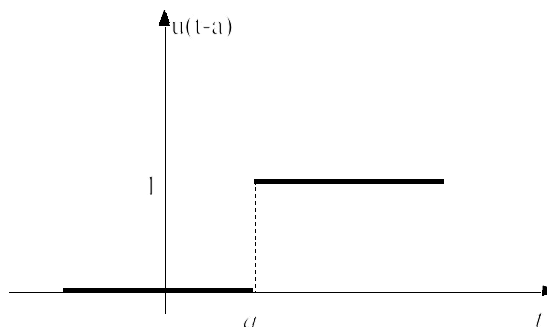
Bemærk: Fouriertransformation og tilbagetransformation er helt ens bortset fra eksponentens fortegn.

## 4.2. Enhedstrinfunktion og enhedsimpulsfunktion

To funktioner, der spiller en stor rolle i signalbehandling er

### 1) Enhedstrinfunktionen $u(t-a)$ (også kaldet Heavisides enhedstrinfunktion)

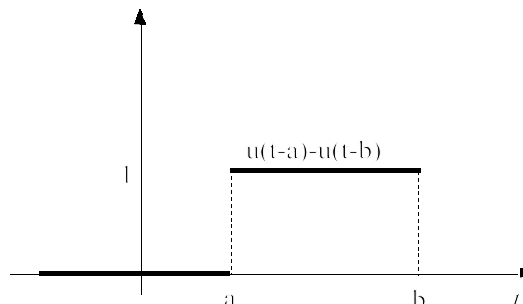
Definition:  $u(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{for } t-a > 0 \\ 0 & \text{for } t-a < 0 \end{cases}$



En firkantsimpuls "der tænder i a og slukker i b", hvor  $a < b$  (se figuren) kan nu skrives  $x(t) = u(t-a) - u(t-b)$

Den Fouriertransformerede af  $x(t)$  er

$$X(\omega) = \frac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{i\omega}$$



Bevis:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt = \int_a^b 1 \cdot e^{-i\omega t} dt = \left[ \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_a^b = \frac{e^{-i\omega b} - e^{-i\omega a}}{-i\omega} = \frac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{i\omega}$$

### 2) Enhedsimpulsfunktionen $\delta(t-a)$ (også kaldet Diracs deltafunktion)

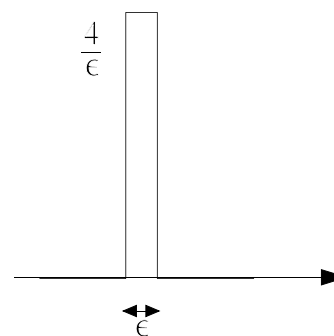
Ofte antager en fysisk størrelse store værdier i et kort tidsrum  $t$ , f.eks. stoftilførslen, når en sækfuld salt pludselig tilsættes eller den elektriske strøm, når en kondensator kortsluttes. I praksis er man sædvanligvis ikke interesseret i formen af en sådan smal puls (eller ingen viden om formen).

Hvis man eksempelvis i et tidsrum  $\epsilon$  tilsætter 4 kg af et stof

A, så vil tilførselshastigheden i gennemsnit være  $4 \cdot \frac{1}{\epsilon}$  kg pr.

tidsenhed i dette lille tidsrum, mens den er 0 udenfor. Det vil derfor være rimeligt at erstatte pulsen med den på figuren, der

er  $4 \cdot \frac{1}{\epsilon}$  i tidsrummet  $\epsilon$  og 0 udenfor dette tidsrum.



Som regel er den nøjagtige værdi af  $\epsilon$  uden praktisk betydning, når blot  $\epsilon$  er lille. Man lader derfor sædvanligvis

$\epsilon \rightarrow 0$ . Det giver en stor beregningsmæssig forenkling. Man idealiseres altså pulsen til meget (uendelig) smalle og meget (uendelig) høje pulser, hvor arealet under hver puls forbliver det samme. Sådanne ideale pulser beskrives ved den såkaldte Diracs deltafunktion  $\delta$ .

$\delta(t-a)$  er ikke en sædvanlig funktion, men en såkaldt “generaliseret funktion” da vi jo strengt

$$\text{taget har, at } \delta(t-a) = \begin{cases} \infty & \text{for } t = a \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) dt = 1$$

hvilket naturligvis ikke er muligt for en sædvanlig funktion.

Man kan vise, at der gælder, **at den Fouriertransformerede af  $\delta(t-a)$  er  $e^{-i\omega a}$  og af  $\delta(t)$  er 1.**

### Eksempel 4.1 Fouriertransformation

Lad os betragte en enkelt firkantsimpuls defineret ved  $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -3 < t < 0 \\ 5 & \text{for } 0 < t < 3 \end{cases}$ .

Bemærk: Funktionen er ikke periodisk

- 1) Find den Fouriertransformerede  $X(\omega)$  af  $x(t)$ .
- 2) Benyt lommeregneren (heller Maple) til at tegne  $|X(\omega)|$
- 3) For den tilsvarende periodiske funktion med perioden 6 fandt vi i eksempel 3.1 at den komplekse

$$\text{Fourierkoefficient var } c_0 = \frac{5}{2} \text{ og } c_n = \frac{5}{6} \frac{e^{-in\omega_0 3} - 1}{-in\omega_0} \text{ for } n \neq 0,$$

Hvilken sammenhæng er der mellem denne og den i spørgsmål 1) fundne løsning?

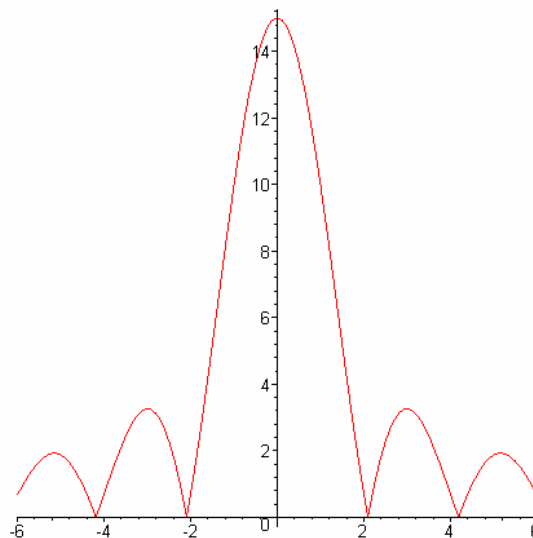
### Løsning:

- 1)  $x(t) = 5(u(t) - u(t-3))$ . Funktionen “tænder i 0 og slukker i 3.

$$\text{Heraf fås, at den Fouriertransformerede } X(\omega) = 5 \left( \frac{e^{-i\omega \cdot 0} - e^{-i\omega 3}}{i\omega} \right) = \underline{\underline{5 \frac{1 - e^{-i\omega 3}}{i\omega}}}$$

$$\text{Kan også finde af definitionen } X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_0^3 5 \cdot e^{-i\omega t} dt = 5 \left[ \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_0^3 = \underline{\underline{5 \frac{e^{-i\omega 3} - 1}{-i\omega}}}$$

- 2) Ti 89:  $Y1=5*\text{abs}((1-e^{(-i*x*3)})/(-i*x))$   
Maple: `plot(abs(5*(exp(-I*x*3)-1)/(-I*x)),x=-6..6);`



- 3) Det ses, at  $6 \cdot c_n = X(n\omega_0)$



### 4.3. Sammenhæng mellem Fourierkoefficienterne $c_n$ og den Fouriertransformerede $X(\omega)$

Som det fremgår af formlen for  $c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 t} dt$  og for  $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt$  er disse meget lig hinanden.

Hvis man som i eksempel 4.1 Fouriertransformerer en enkelt impuls, så vil det gælde, at  $2T \cdot c_n = X(n \cdot \omega_0)$ , dvs. vi kan ud fra den Fouriertransformerede umiddelbart finde Fourierkoefficienterne. Formlen kan dog give problemer for  $n = 0$ , men de klares jo sædvanligvis let uden integration.

### 4.4. Regneregler for Fouriertransformerede

I nedenstående skema er angivet nogle nyttige regneregler for komplekse Fouriertransformerede.

formel nr.	Funktion	Fouriertransformeret
	$x(t), y(t)$	$X(\omega), Y(\omega)$
(1): Linearitetsregel	$a \cdot x(t) + b \cdot y(t)$	$a \cdot X(\omega) + b \cdot Y(\omega)$
(2): Tids invertering	$x(-t)$	$X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$
(3): Tids skalering	$x(a \cdot t), a \neq 0$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
(4): Forsinkelse	$x(t - a)$	$X(\omega) \cdot e^{-ia\omega}$
(5): Forskydningsregel	$x(t) \cdot e^{i\omega_0 t}$	$X(\omega - \omega_0)$
(6): Multiplikation med $t^n$	$t^n \cdot x(t), n = 1, 2, 3, \dots$	$i^n \cdot \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega)$
(7): Differentiation i tidsdomæne	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}, n = 1, 2, 3, \dots$	$(i\omega)^n X(\omega)$
(8): Foldning i tidsdomæne	$(x * y)(t) = \int_{p=-\infty}^{p=\infty} x(t-p) \cdot y(p) dp$	$X(\omega) \cdot Y(\omega)$
(9): Dualitetsregel	$\left[ x(t) \xrightarrow{\text{Fourier Transformation}} X(\omega) \right] \Rightarrow \left[ X(t) \xrightarrow{\text{Fourier Transformation}} x(-\omega) \cdot 2\pi \right]$ $\left[ X(\omega) \xrightarrow{\text{Invers Fourier Transformation}} x(t) \right] \Rightarrow \left[ x(\omega) \xrightarrow{\text{Invers Fourier Transformation}} X(-\omega) \cdot \frac{1}{2\pi} \right]$	

I Ti 89 kan man finde definitioner, regneregler og en lille tabel over transponerede APPS, EEPro, ENTER, F4(Reference), 6: Transforms, 1: Fourier Transforms  
 Nu fremkommer en lille menu, hvor definition, egenskaber og en lille tabel kan findes.



**Eksempel 4.2. Regneregler**

Lad os igen betragte den enkelt firkantsimpuls defineret ved  $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -3 < t < 0 \\ 5 & \text{for } 0 < t < 3 \end{cases}$ .

med den Fouriertransformerede  $X(\omega) = 5 \frac{e^{-i\omega 3} - 1}{-i\omega}$

1) Find ved benyttelse af en regneregler den Fouriertransformerede  $X_1(\omega)$  til funktionen

$$x_1(t) = \frac{1}{5} \cdot x(t).$$

2) Find ved benyttelse af en regneregler den Fouriertransformerede  $X_2(\omega)$  til funktionen

$$x_2(t) = x_1(3 \cdot t)$$

3) Skitser graferne for  $x_1(t)$  og  $x_2(t)$  samt deres Fouriertransformerede  $X_1(\omega)$  og  $X_2(\omega)$ .

4) Find ved benyttelse af en regneregler den Fouriertransformerede  $X_3(\omega)$  til funktionen

$$x_3(t) = t \cdot x_2(t)$$

5) Skitser graferne for  $x_3(t)$  og dens Fouriertransformerede  $X_3(\omega)$ .

6) Benyt relationen  $2T \cdot c_n = X(n \cdot \omega_0)$  til at finde de komplekse Fourierkoefficienter til  $x_3(t)$  for

$$n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$$

7) Bestem på grundlag heraf de første 5 led af den reelle Fourierrekke for  $x_3(t)$  (sammenlign med rækken på side 1).

**Løsning:**

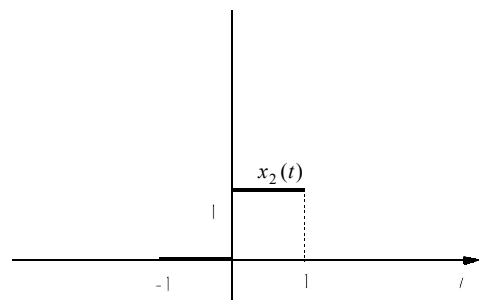
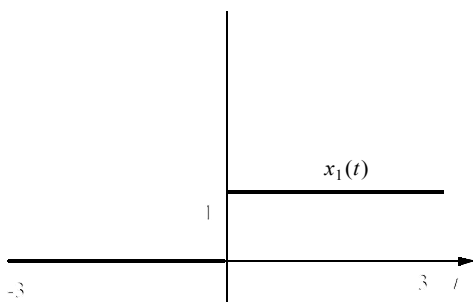
1) Ifølge formel (1) (linearitetsreglen) er  $X_1(\omega) = \frac{1}{5} X(\omega) = \frac{e^{-i\omega 3} - 1}{-i\omega}$

2) Ifølge formel (3) (tidsskalering) er  $X_2(\omega) = \frac{1}{3} X_1\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{e^{-i\frac{\omega}{3} 3} - 1}{-i\frac{\omega}{3}} = \frac{e^{-i\omega} - 1}{-i\omega}$

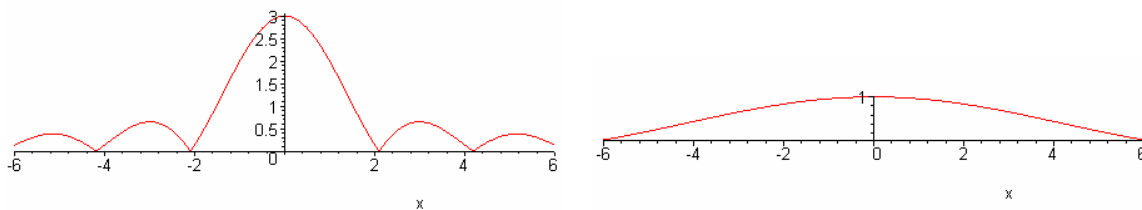
3)  $x_1(t) = \frac{1}{5} \cdot x(t)$ , dvs.  $x_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -3 < t < 0 \\ 1 & \text{for } 0 < t < 3 \end{cases}$

$$x_2(t) = x_1(3t), \text{ dvs. } x_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -3 < 3t < 0 \\ 1 & \text{for } 0 < 3t < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -1 < t < 0 \\ 1 & \text{for } 0 < t < 1 \end{cases}$$

Da  $x_2(t)$  har en "periode" der er  $\frac{1}{3}$  af  $x_1(t)$ , vil amplitudespektret for de to være identiske bortset fra, at højden af amplitudespektret for  $X_2(t)$  er  $\frac{1}{3}$  så høj men samtidig 3 gange så bred.



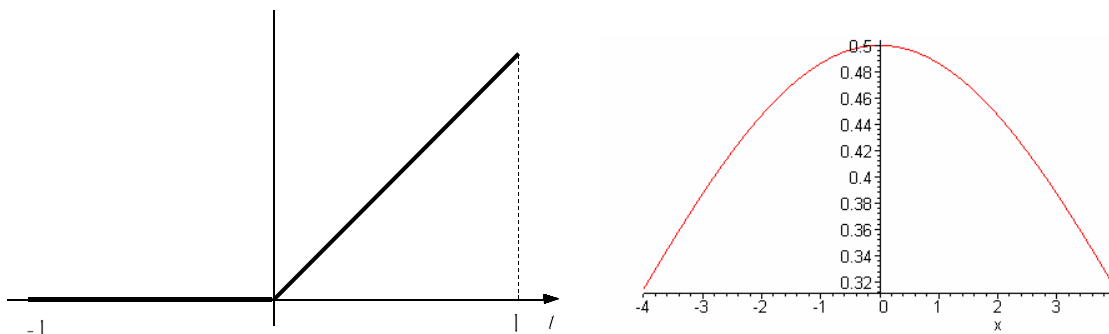
3. Fourierrække på kompleks form



4) Ifølge formel (6) (multiplikation med  $t$ ) er

$$X_3(\omega) = i \cdot \frac{dX_2(\omega)}{d\omega} = i \frac{d}{d\omega} \left( \frac{e^{-i\omega} - 1}{-i\omega} \right) = - \frac{\omega(-ie^{-i\omega}) - (e^{-i\omega} - 1)}{\omega^2} = \frac{(i\omega + 1)e^{-i\omega} - 1}{\omega^2}$$

5)  $x_3(t) = t \cdot x_2(t)$ , dvs.  $x_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -1 < t < 0 \\ t & \text{for } 0 < t < 1 \end{cases}$



6)  $2 \cdot c_n = X_3(n \cdot \omega_0) \Leftrightarrow c_n = \frac{1}{2} \frac{(in\omega_0 + 1)e^{-in\omega_0} - 1}{(n \cdot \omega_0)^2}$

Da  $\omega_0 = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{1} = \pi$  fås  $c_n = \frac{1}{2} \frac{(in\pi + 1)e^{-in\pi} - 1}{(n \cdot \pi)^2} = \frac{1}{2} \frac{(in\pi + 1)(-1)^n - 1}{(n \cdot \pi)^2} = \frac{(-1)^n - 1}{2(n \cdot \pi)^2} + i \frac{(-1)^n}{2n \cdot \pi}$

$$c_1 = \frac{-1}{\pi^2} - i \frac{1}{2\pi}, \quad c_2 = i \frac{1}{4\pi}, \quad c_3 = \frac{-1}{9\pi^2} - i \frac{1}{6\pi}, \quad c_4 = i \frac{1}{8\pi}, \quad c_5 = \frac{-1}{25\pi^2} - i \frac{1}{10\pi}$$

$$c_{-1} = \frac{-1}{\pi^2} + i \frac{1}{2\pi}, \quad c_{-2} = -i \frac{1}{4\pi}, \quad c_{-3} = \frac{-1}{9\pi^2} + i \frac{1}{6\pi}, \quad c_{-4} = -i \frac{1}{8\pi}, \quad c_{-5} = \frac{-1}{25\pi^2} + i \frac{1}{10\pi}$$

7) Da man ikke umiddelbart kan finde  $c_0$  findes den ved integration.

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 t dt = \frac{1}{4}$$

Da  $a_0 = c_0 = \frac{1}{4}$ ,  $a_n = 2 \cdot \text{Re}(c_n)$ ,  $b_n = -2 \cdot \text{Im}(c_n)$ ,  $\omega_0 = \frac{\pi}{T} = \pi$  fås:

$$x(t) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \cos(\pi t) + \frac{1}{\pi} \sin(\pi t) - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi t) - \frac{2}{9\pi^2} \cos(3\pi t) + \frac{1}{2\pi} \sin(3\pi t) - \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi t) - \frac{2}{25\pi^2} \cos(5\pi t) + \frac{1}{5\pi} \sin(5\pi t) + \dots$$

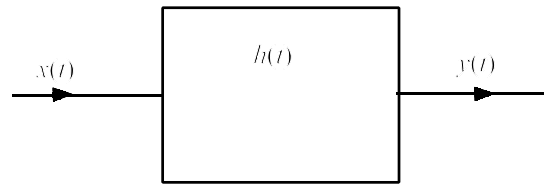
Det ses, at det er samme række som på side 1.



**Foldningsregel.**

Lad os betragte et "LFI-system med impulssvaret  $h(t)$ , output  $y(t)$  og input  $x(t)$ .

Der gælder da, at  $y(t) = (h * x)(t)$ , hvor  $h * x$  er foldningen og tilsvarende  $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$



Lad os som eksempel herpå betragte et system bestemt ved en differentiaalligning.

**Eksempel 4.3. Foldning**

Lad der være givet differentiaalligningen

$$y'(t) + 3y(t) = x(t)$$

hvor input  $x(t)$  er det i eksempel 4.1 angivne enkelte firkantsimpuls  $x(t) = 5(u(t) - u(t - 3))$ .

Idet det oplyses, at funktionen  $h(t) = e^{-at} \cdot u(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{for } t > 0 \\ 0 & \text{for } t < 0 \end{cases}$ ,  $a > 0$  har den Fouriertransformerede

$H(\omega) = \frac{1}{a + i\omega}$  (fundet i en tabel), skal man ved foldning finde den stationære løsning til differentiaalligningen.

**Løsning.**

Overføringsfunktionen  $H(\omega) = \frac{1}{i\omega + 3}$ , dvs.  $h(t) = e^{-3t} \cdot u(t)$

Vi har derfor nu, at

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{p=-\infty}^{p=\infty} x(p) \cdot h(t-p) dp = 5 \int_{p=-\infty}^{p=\infty} (u(p) - u(p-3)) \cdot e^{-3(t-p)} u(t-p) dp$$

For  $p < 0$  er  $u(p) - u(p-3) = 0$ , dvs.  $y(t) = 5 \int_{p=0}^{p=\infty} (u(p) - u(p-3)) \cdot e^{-3(t-p)} u(t-p) dp$

For  $0 < t < 3 \wedge p < t$  er

$$y(t) = 5 \int_{p=0}^{p=t} e^{-3(t-p)} dp = 5e^{-3t} \int_{p=0}^{p=t} e^{-3p} dp = -\frac{5}{3} e^{-3t} [e^{-3p}]_0^t = -\frac{5}{3} e^{-3t} (e^{-3t} - 1)$$

For  $t > 3$  er  $y(t) = 5 \int_{p=0}^{p=3} e^{-3(t-p)} dp = 5e^{-3t} \int_{p=0}^{p=3} e^{-3p} dp = -\frac{5}{3} e^{-3t} [e^{-3p}]_0^3 = -\frac{5}{3} e^{-3t} (e^{-9} - 1)$  ♦

Er man kun interesseret i amplituderne, bliver regningerne meget nemmere, idet vi jo så har, ifølge foldningsreglen, at den Fouriertransformerede af foldningen  $x * h(t)$  er  $X(\omega) \cdot H(\omega)$

**Eksempel 4.4. Amplitudespektret**

Lad der være givet differentiallyingningen

$$y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = x(t)$$

hvor input  $x(t)$  er det i eksempel 4.1 angivne enkelte firkantsimpuls  $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -3 < t < 0 \\ 5 & \text{for } 0 < t < 3 \end{cases}$ .

med den Fouriertransponerede  $X(\omega) = 5 \frac{e^{-i\omega 3} - 1}{-i\omega}$ .

Find og tegn amplitudespektret for output  $y(t)$ .

**Løsning:**

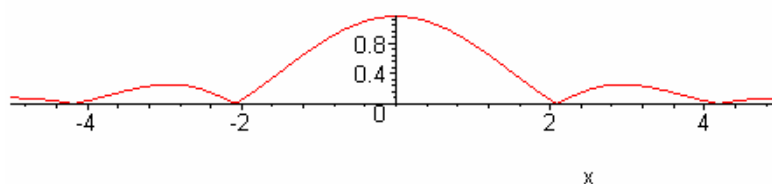
Af differentiationsreglen (7) fås

$$(i\omega)^2 Y(\omega) + 4i\omega Y(\omega) + 13Y(\omega) = X(\omega) \Leftrightarrow Y(\omega) = \frac{1}{(i\omega)^2 + 4i\omega + 13} X(\omega)$$

dvs.  $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$ , hvor  $H(\omega) = \frac{1}{(i\omega)^2 + 4i\omega + 13}$  (overføringsfunktionen)

Amplitudespektret fås nu som  $|Y(\omega)|$

Ved indtastning i Ti 89 fås grafen for amplitudespektret :

**5. Diskret Fouriertransformation.****5.1. Indledning.**

Vi har hidtil antaget, at “input” var en kontinuert funktion  $x(t)$ , der kan beskrives ved et relativt simpelt funktionsudtryk. I praksis kan et signal være så uregelmæssigt, at det ikke kan beskrives ved et “simpelt” funktionsudtryk. Man udtager så i stedet en række funktionsværdier (man “sampler” det kontinuerte signal) hvorved der fremkommer som en række tal. Man kan sammenligne det med når en computer tegner grafen for en kontinuert funktion. Den beregner funktionsværdierne i et stort antal tætsiddende punkter, og tegner så kurven ved at forbinde disse punkter med rette linier.

Vi vil i det følgende betegne sådanne “diskrete” funktioner  $x[n]$  i stedet for  $x(t)$ .

**5.2. Definition af diskret Fouriertransformation.**

Lad input være en række tal (et diskret signal) bestående af  $N$  tal  $x[0], x[1], x[2], \dots, x[N-1]$ .

Ved den **diskrete Fouriertransponerede**  $X[k]$  af  $x[n]$  forstås

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i \cdot 2\pi \cdot \frac{n}{N} k} \quad \text{hvor } k \text{ er et helt tal.}$$

$$\text{Den inverst transponerede af } X[k] \text{ er bestemt af } x[n] = \frac{1}{N} \sum X[k] \cdot e^{i \cdot 2\pi \cdot \frac{n}{N} k}.$$

Beregningerne udføres på computer ved benyttelse af en metode der kaldes "Fast Fourier Transform" (forkortet FFT) med en regnetid der er proportional med  $N \cdot \log(N)$ .  $N$  bør så vidt mulig være en potens af 2 f.eks.  $N = 2^{10} = 1024$  og skal i praksis skal være et stort tal. Såvel Ti 89 som Maple har indbygget FFT metoden.

### 5.3. Beregning af diskret Fouriertransponerede

For bedre at forstå formlerne vil vi i det følgende eksempel regne med et lille antal  $N$ -værdier.

#### Eksempel 5.1. Beregning af diskret Fouriertransformeret.

Lad os antage at signalet  $x[n]$  er givet ved følgende tabel (svarende til firkantsimpulsen i eksempel 4.1)

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	0	0	0	0	5	5	5	5

- 1) Find de Fouriertransponerede  $X[0]$  og  $X[1]$ .
- 2) Benyt Ti89 eller Maple til at finde alle 8 Fouriertransponerede.

#### Løsning:

$$1) X[0] = \sum_{n=0}^7 x[n] e^{-i \cdot 2\pi \cdot \frac{n}{8} \cdot 0} = 0 + 0 + 0 + 0 + 5 + 5 + 5 + 5 = \underline{\underline{20}}$$

$$X[1] = \sum_{n=0}^7 x[n] e^{-i \cdot 2\pi \cdot \frac{n}{8} \cdot 1} = 0 + 0 + 0 + 0 + 5e^{-i \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{8} \cdot 1} + 5e^{-i \cdot 2\pi \cdot \frac{5}{8} \cdot 1} + 5e^{-i \cdot 2\pi \cdot \frac{6}{8} \cdot 1} + 5e^{-i \cdot 2\pi \cdot \frac{7}{8} \cdot 1}$$

$$= 5 \left( e^{-i \cdot \pi} + e^{-i \cdot \frac{5}{4} \pi} + e^{-i \cdot \frac{3}{2} \pi} + e^{-i \cdot \frac{7}{4} \pi} \right) = 5 \left( (-1) + (1 + \sqrt{2})i \right) = \underline{\underline{-5 + 12.0711 \cdot i}}$$

- 2) Benyttes Ti 89's FFT-program benyttes følgende ordre:  
 APPS, Vælg EEPro, F2, Vælg 6: Fourier Transforms, Vælg 1: FFT  
 Indtast i Time tallene: 0,0,0,0,5,5,5,5  
 F2: I Freq fremkommer de transponerede tal. Tryk eventuelt på F4 for at studere dem nærmere.  
 Det ses (forhåbentlig), at de to første tal svarer til de i punkt 1) beregnede.



## 5.4. Foldning

Lad os betragte et "LFI" system med impulssvaret  $h[n]$ , output  $y[n]$  og input  $x[n]$ .

Er input og impulssvaret diskrete signaler kan man let finde output ved benyttelse af FFT.

Ved FFT findes de Fouriertransponerede  $H[n]$  og  $X[n]$ .

Idet der gælder samme foldningsætning i det diskrete som i det kontinuerte tilfælde, så kan man finde den Fouriertransponerede  $Y[n]$  af  $Y[n] = H[n] \cdot X[n]$

Derefter findes output  $y[n]$  ved at anvende den inverse Fouriertransponerede på  $Y[n]$ .

Det følgende eksempel illustrerer dette.

### Eksempel 5.2. Beregning af "output" i et LFI-system.

I eksempel 4.3 havde et LFI-system impulssvaret  $h(t) = e^{-3t} \cdot u[t]$  med "input"  $x(t) = 5(u(t) - u(t - 3))$ . Vi betragter nu i stedet

$h[n] = e^{-3n} \cdot u[n]$  og  $x[n] = 5(u[n] - u[n - 3])$ .

Find ved FFT output  $y[n]$  for  $N = 8$ .

### Løsning:

Vi har følgende tabel:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$h[n]$	1	$e^{-3}$	$e^{-6}$	$e^{-9}$	$e^{-12}$	$e^{-15}$	$e^{-18}$	$e^{-21}$
$x[n]$	5	5.25	5.76	0.26	0.013	0.006	0	0

Metode:

h-værdierne indtastes i FFT og man får et resultat, som automatisk gemmes i Main under navnet Freq. Vælg Home, Var-link, marker freq, F1, Rename, giv eksempelvis navnet h, ENTER


Analogt anvendes FFT på x-værdierne, de gives navnet x.

Vælg home og skriv h\*x ENTER.

STO, kald resultatet for a,

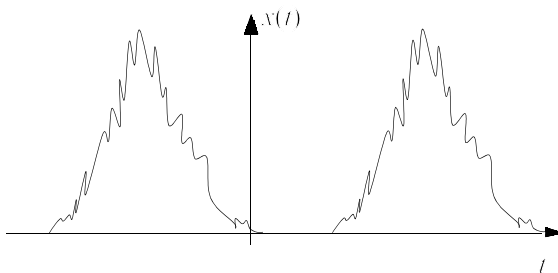
Man kalder nu inverse FFT og i freq skrive a, ENTER, resultatet fremkommer i Time.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$y[n]$	1	1	1	0	0	-0.00001	0	0

Det er klart, at antallet af punkter burde have været langt større for at resultatet kan give mening. 

**Eksempel 5.3. Autokorrelation**

Lad os antage vi har et signal  $x(t)$ , der på nær støj antages at have to “pukler”.



Foretager man en foldning af  $x(t)$  med sig selv  $(x * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(p) \cdot x(t - p) dp$ , så får man et mål for hvor meget funktionen  $x(p)$  ligner sin egen parallelforskudte funktion  $x(t - p)$ . Man siger, at man benytter autokorrelation.

Idet den fouriertransponerede af foldningen  $(x * x)(t)$  er  $X(\omega) \cdot X(\omega)$  kan man ved FFT hurtigt beregne  $(x * x)(t)$  (først findes  $X(\omega)$  ved FFT, og derpå findes  $(x * x)(t)$  ved invers FFT anvendt på  $(X(\omega))^2$ )

En mere detaljeret beskrivelse kan findes i B. Helleesen, M. Oddershede Larsen: Matematik for Ingeniører: bind 3 side 197.

**Eksempel 5.4. Energispektrum, dataudglatning, optimal filtrering .**

Lad os igen tænke os et signal  $x(t)$ , som har et meget uregelmæssigt forløb.

1) Ved **energispекteret** for  $x(t)$  forstås  $P(\omega) = |X(\omega)|^2 + |X(-\omega)|^2$ ,  $0 \leq \omega < \infty$

Den spektrale energitæthed kan derfor hurtigt beregnes ved FFT .

2) **Dataudglatning, optimal filtrering**

Er signalet påvirket af en del støj, vil man søge at fjerne så meget som muligt af støjen.

Man kan ofte skønne en opspaltning af energispekteret  $P(\omega) = P_s(\omega) + P_n(\omega)$  i “signal”  $P_s(\omega)$  og “støj”  $P_n(\omega)$  . Derpå kan en udglattet funktion  $x_1(t)$  findes ved tilbagestransponering af

$$\frac{X(\omega)}{1 + \frac{P_n(\omega)}{P_s(\omega)}}$$

Metoden kaldes optimal filtrering. Er opspaltningen korrekt fås nemlig en udglattet funktion med mindst mulig RMS-fejl.

En mere detaljeret beskrivelse kan findes i B. Helleesen, M. Oddershede Larsen: Matematik for Ingeniører: bind 3 side 197.



## OPGAVER

### Opgave 1: Fourierrække.

Find Fourierrækken for hver af følgende funktioner:

$$1) \quad x(x) = \begin{cases} t & \text{for } -2 < t \leq 0 \\ 0 & \text{for } 0 < t < 2 \end{cases}$$

$$2) \quad x(t) = t \quad \text{for } -1 < t < 1$$

$$3) \quad x(x) = \begin{cases} -t & \text{for } -1 < t \leq 0 \\ t & \text{for } 0 < t < 1 \end{cases}$$

$$4) \quad x(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } -2 < t \leq 0 \\ 0 & \text{for } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{for } 1 < t < 2 \end{cases}$$

### Opgave 2: Tvungen svingning, resonans.

#### Indledning:

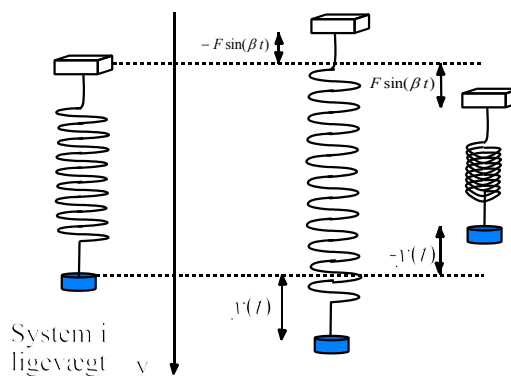
Lad os betragte et lod med massen  $m$  der er fastgjort til en fjeder.

Loddet bevæger sig frem og tilbage påvirket dels af en fjederkraft og dels af en luftmodstand. Endvidere er dette system påvirket af en "ydre kraft" ved, at fjederens fastspændingspunkt bevæges sig frem og tilbage på en sådan måde, at afvigelsen fra det oprindelige fastspændingspunkt til tiden  $t$  er  $r(t)$  (se figuren), hvor denne ydre påvirkning  $r(t)$  antages at være periodisk.

Loddets bevægelse  $y(t)$  kan da beskrives ved en differentiallyingning

$$m \cdot y''(t) + c \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = r(t)$$

(bemærk, at denne differentiallyingning er fuldstændig analogt til det elektriske kredsløb i afsnit 3.4.)

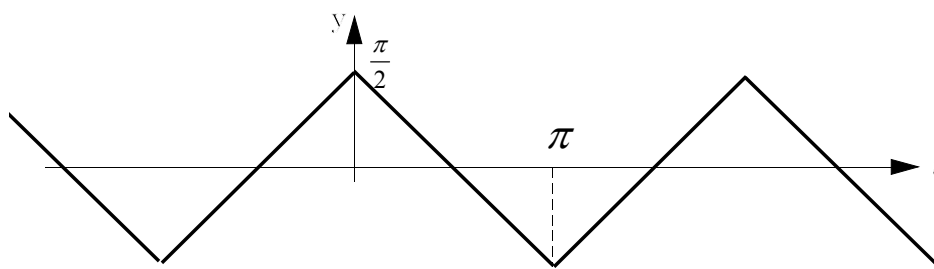


#### Opgave:

Lad  $m = 1$  (gram)  $c = 0.02$  (gram/sec),  $k = 25$  (gram/sec<sup>2</sup>)

og  $r(t)$  (målt i gram  $\cdot$  cm/sec<sup>2</sup>) er en periodisk funktion med periode  $2\pi$  givet ved

$$r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & \text{for } -\pi < t < 0 \\ -t + \frac{\pi}{2} & \text{for } 0 < t < \pi \end{cases}$$



Differentiallyingningen bliver da  $y''(t) + 0.02y'(t) + 25 \cdot y(t) = r(t)$



Det oplyses, at Fourierrækken for  $r(t)$  er  $r(t) = \frac{4}{\pi} \left( \cos t + \frac{1}{3^2} \cos(3t) + \frac{1}{5^2} \cos(5t) + \dots \right)$

- 1) Find de komplekse Fourierkoefficienter  $k_n$  for funktionen  $r(t)$ , for  $n = 1, 3, 5, 7$ .
- 2) Find overføringsfunktionen  $H(n)$  for differentialligningen
- 3) Lad den stationære løsning  $y(t)$  have de komplekse Fourierkoefficienter  $c_n$ , dvs.

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \cdot n \cdot t}. \text{ Find værdien af } |c_n| \text{ for } n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7 \text{ med 4 decimaler.}$$

- 4) Output  $y(t)$  kan nu skrives  $y(t) = A_1 \sin(t + \varphi_1) + A_3 \sin(3t + \varphi_3) + A_5 \sin(5t + \varphi_5) + \dots$

hvor  $A_n = 2|c_n|$ .

Tegn amplitudespektret  $A_n$  for  $n = 1, 3, 5, 7$  og afgør herudfra hvilken/hvilke amplitude/amplituder, der er de dominerende.

### Opgave 3 (regneregler)

Givet funktionen  $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

Vi har, at  $x(t) = u(t-0) - u(t-2)$ , og  $X(\omega) = \frac{1 - e^{-i\omega 2}}{i\omega}$

- 1) Lad  $x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } -2 < t < 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

a) Udtryk  $x_1(t)$  ved enhedstrinsfunktioner

b) Find den Fouriertransponerede  $X_1(\omega)$

- 2) Lad  $x_2(t) = \begin{cases} -1 & \text{for } -2 < t < 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

Tegn grafen for  $x_2(t)$ , og find  $X_2(\omega)$

- 3) Lad  $x_3(t) = \begin{cases} -1 & \text{for } -2 < t < 0 \\ 1 & \text{for } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

Tegn grafen for  $x_3(t)$ , og find  $X_3(\omega)$

- 4) Lad  $x_4(t) = \begin{cases} -t & \text{for } -2 < t < 0 \\ t & \text{for } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

Tegn grafen for  $x_4(t)$ , og find  $X_4(\omega)$ .

- 5) Givet differentialligningen  $\frac{dy}{dt} + 2y(t) = x_4(t)$

a) Find den Fouriertransponerede  $Y(\omega)$  af  $y(t)$

b) Tegn amplitudespektret  $|Y(\omega)|$ .

**Opgave 4. Diskret Fouriertransformation**

1) Beregn den diskrete Fouriertransformerede af  $\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0, 0$

2) Beregn den inverse diskrete Fouriertransformerede af  $4 \quad 12 \quad 12 \quad 12$

3) Der er givet et LFI-system med impulssvaret  $h[n] = 0.3^n \cdot u[n]$ . Systemet påtrykkes signalet

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

Find fourierrækkecoeffienterne for output  $y[n]$  for  $N = 4$ .

## STIKORD

### A

amplitude 2, 4, 5  
 amplitudespektret 4, 12, 24  
 autokorrelation 26

### B

### C

### D

dataudglatning 27  
 DC=Direct current 1  
 deltafunktion 18  
 differentialligning, input periodisk 13  
 differentiation i tidsdomæne 20  
 differentiationsregel for komplekse Fourier-  
 koefficienter 14  
 Dirac's deltafunktion 18  
 Diskret Fouriertransformation 24  
 Dualitetsregel 20

### E

elektrisk kredsløb 13  
 energi i signal 4  
 energispektrum 27  
 enhedstrinfunktion 18  
 enhedsimpulsfunktion 18  
 Eulers formel 10

### F

FFT=Fast Fourier Transform 25  
 firkantsimpuls 1, 8  
 foldningsregel 20, 23, 25  
 forsinkelsesregel:Fouriertransformerede 20  
 Forskydningsregel:Fouriertransform.) 20  
 Fourierkoefficienter  
 differentiationsregel 14  
 komplekse 10, 11  
 linearitetsregel 14  
 reelle 3, 10  
 Fourierrække  
 reelle 2, 3  
 kompleks 10  
 for lige funktion 6, 7  
 for ulige funktion 6, 7  
 Fouriertransformation 17  
 frekvens 2

### G

grundfrekvens 9

### H

harmonisk analyse 2  
 Heavisides enhedstrinfunktion 18

### I

invers Fouriertransformeret 17

### K

kompleks Fourierrække 10

### L

lige funktion 6  
 linearitetsregel  
 for Fourierkoefficienter 14  
 for Fouriertransformerede 20

### M

### N

### O

optimal filtrering 27  
 opgaver 28  
 overføringsfunktion 15  
 oversvingning 2

### P

periode 2  
 periodisk firkantsimpuls 1, 4, 8, 11, 12

### R

reelle Fourierrækker 2, 3, 10  
 regneregler for fouriertransformerede 20  
 rene svingninger 2  
 resonans 16

### S

stykkevis differentiabel funktion 2  
 superposition 2  
 svingningstid 2

### T

Tids invertering 20  
 Tids skalering 20

*Stikord*

U  
ulige funktion 6

V  
vinkelfrekvens 1, 2